模块六 复合函数综合

第 1 节 复合函数方程问题（★★★★）

强化训练

1.（2022 • 郑州期末 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为_____.

答案：2

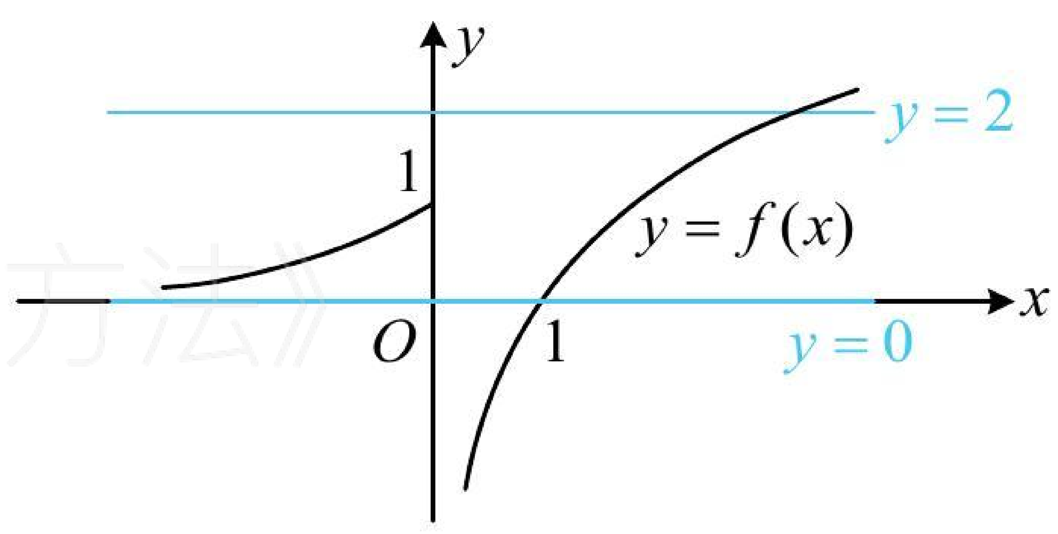
解析：设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))-1=0$ 即为 $f(t)-1=0$，也即 $f(t)=1$，

观察解析式可得 $f(t)=1$ 在两段都很好解，所以下面通过讨论求解此方程，

当 $t\le 0$ 时，$f(t)=2^t=1\Rightarrow t=0$；当 $t>0$ 时，$f(t)=\log_2 t=1\Rightarrow t=2$；

所以方程 $f(t)=1$ 有两个解 $t=0$ 或 2，故 $f(x)=0$ 或 $f(x)=2$，作出 $y=f(x)$ 的大致图象如图，

由图可知直线 $y=0$ 和 $y=2$ 各与 $y=f(x)$ 的图象有 1 个交点，所以 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为 2.



2.（2022 •安徽期中 •★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}, x<0\\ \ln x, x>0\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(f(x)+2)+2$ 的零点个数为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

答案：B

解析：$g(x)=0\Leftrightarrow f(f(x)+2)+2=0$，设 $t=f(x)+2$，则 $f(t)+2=0$，所以 $f(t)=-2$，

此方程可通过讨论 t 代入解析式求解，

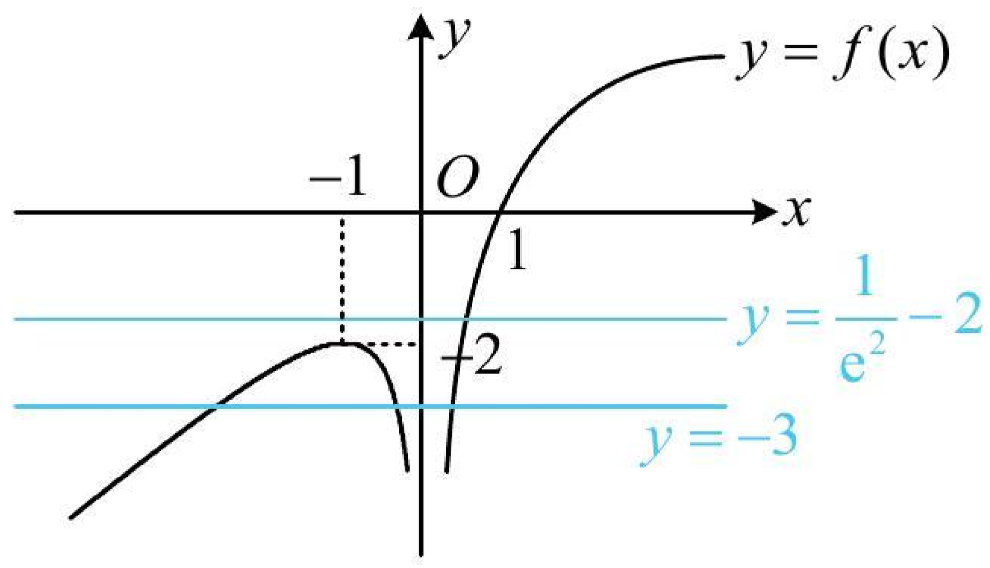
当 $t<0$ 时，$f(t)=t+\dfrac{1}{t}$，所以 $f(t)=-2$ 即为 $t+\dfrac{1}{t}=-2$，解得：$t=-1$；

当 $t>0$ 时，$f(t)=\ln t$，所以 $f(t)=-2$ 即为 $\ln t=-2$，解得：$t=\dfrac{1}{e^2}$；

将解出的 t 代回 $t=f(x)+2$，有 $f(x)+2=-1$ 或 $f(x)+2=\dfrac{1}{e^2}$，故 $f(x)=-3$ 或 $f(x)=\dfrac{1}{e^2}-2$，

要研究 $g(x)$ 的零点个数，可画图看直线 $y=-3$ 和 $y=\dfrac{1}{e^2}-2$ 与 $f(x)$ 的图象的交点个数，

如图，$y=-3$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，$y=\dfrac{1}{e^2}-2$ 与 $f(x)$ 的图象有 1 个交点，故 $g(x)$ 有 4 个零点.



3．（2022·阆中期中·★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+a-1=0$ 仅有 1 个实数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-2\mathrm{e},1-\mathrm{e})$　（B）$(1-\mathrm{e},1]\cup\{2\}$　（C）$(1-\mathrm{e},1)$　（D）$(1-\mathrm{e},2\mathrm{e})$

答案：B

解析：将 $f(x)$ 看作一个整体，原方程可分解因式，

$[f(x)]^2+af(x)+a-1=0\Leftrightarrow[f(x)+a-1][f(x)+1]=0$，所以 $f(x)=1-a$ 或 $f(x)=-1$，

原方程仅有 1 个实数解等价于直线 $y=1-a$ 和 $y=-1$ 与 $f(x)$ 的图象共有 1 个交点，所以下面作图分析，

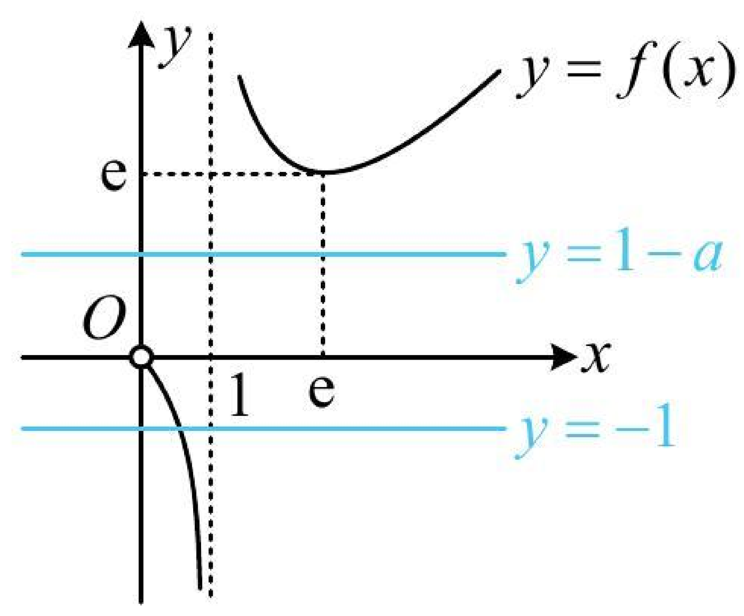
由题意，$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ 或 $1<x<\mathrm{e}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上↘，在 $(1,\mathrm{e})$ 上↘，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↗，

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，所以 $f(x)$ 的大致图象如图，

由图可知直线 $y=-1$ 与 $f(x)$ 的图象已经有 1 个交点了，

所以 $y=1-a$ 应与 $f(x)$ 的图象无交点或与 $y=-1$ 重合，从而 $0\le 1-a<\mathrm{e}$ 或 $1-a=-1$，故 $1-\mathrm{e}<a\le 1$ 或 $a=2$.



【反思】本题 $1-a=-1$ 这种情况容易被忽略，所以若将选项 C 改为 $(1-\mathrm{e},1]$，则很容易误选此选项.

4．（★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,x>0\\-x^2-2x,x\le 0\end{cases}$，若函数 $y=2f^2(x)+1$ 与 $y=af(x)$ 的图象有 8 个交点，则实数 a 的取值范围为_____.

答案：$(2\sqrt{2},3)$

解析：由题意，方程 $2f^2(x)+1=af(x)$ 有 8 个实根，$2f^2(x)+1=af(x)\Leftrightarrow 2f^2(x)-af(x)+1=0$ ①，

所以问题等价于关于 x 的方程①有 8 个实数解，

因为含 x 的部分是 $f(x)$ 的整体形式，所以将 $f(x)$ 换元，

设 $t=f(x)$，则方程①即为 $2t^2-at+1=0$，作出 $t=f(x)$ 的图象如图 1，

由图可知一条水平的直线和该图象的交点个数可能为 1，2，3，4，

怎样能使方程①有 8 个解？只能是方程 $2t^2-at+1=0$ 有 2 根 t_1、t_2，且 $t_1=f(x)$ 和 $t_2=f(x)$ 都有 4 个解，

所以 t_1，t_2 都位于 $(0,1)$ 上，故二次函数 $\varphi(t)=2t^2-at+1$ 的图象应如图 2 所示，

所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-8>0\\ 0<\dfrac{a}{4}<1\\ \varphi(1)=3-a>0\\ \varphi(0)=1>0\end{cases}$，解得：$2\sqrt{2}<a<3$.

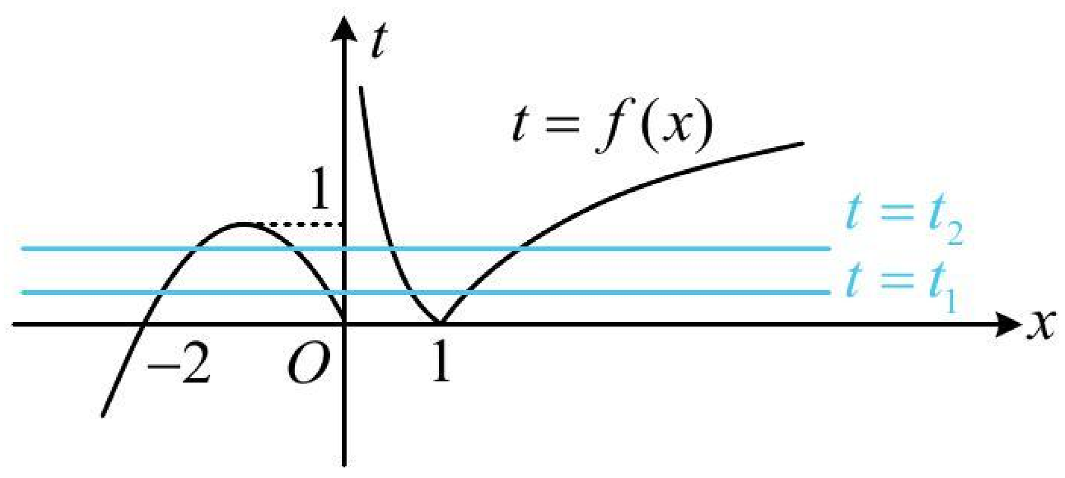


图1

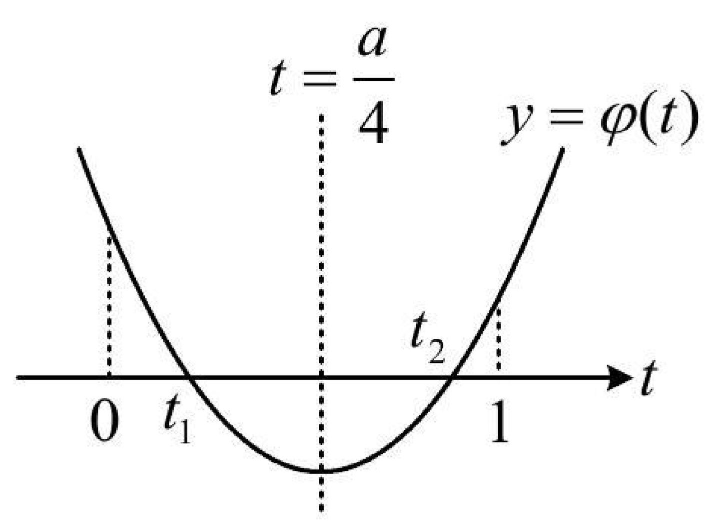


图2

5.（★★★★）已知 $f(x)=\begin{cases}ax+1,x\le 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，若函数 $y=f(f(x))+1$ 有 4 个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

答案：$(0,+\infty)$

解析：设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))+1=0$ 即为 $f(t)=-1$，可由直线 $y=-1$ 与 $y=f(t)$ 的图象交点的横坐标来看此方程的解的情况，所以画图，需讨论 a 的正负，

当 $a\le 0$ 时，如图 1，$f(t)=-1\Leftrightarrow \log_2 t=-1\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}$，

如图 2，直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 与 $y=f(x)$ 的图象只有 1 个交点，从而 $y=f(f(x))+1$ 仅有 1 个零点，不合题意；

当 $a>0$ 时，如图 3，直线 $y=-1$ 与 $y=f(t)$ 的图象有 2 个交点，其横坐标分别为 $t_0(t_0<0)$ 和 $\dfrac{1}{2}$，

如图 4，$y=\dfrac{1}{2}$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点，$y=t_0$ 与 $y=f(x)$ 的图象也有 2 个交点，

所以方程 $f(x)=t_0$ 和 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 共有 4 个实数解，满足题意；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

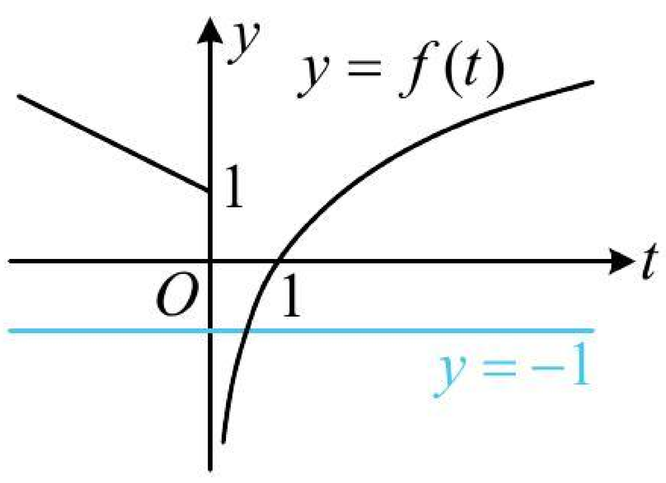


图1

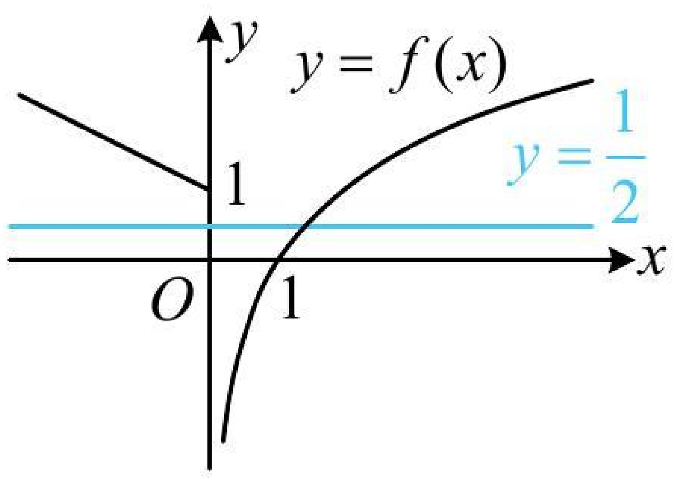


图2

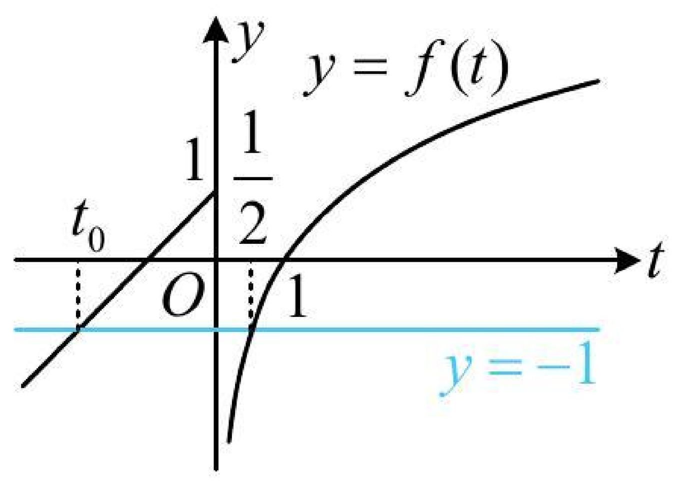


图3

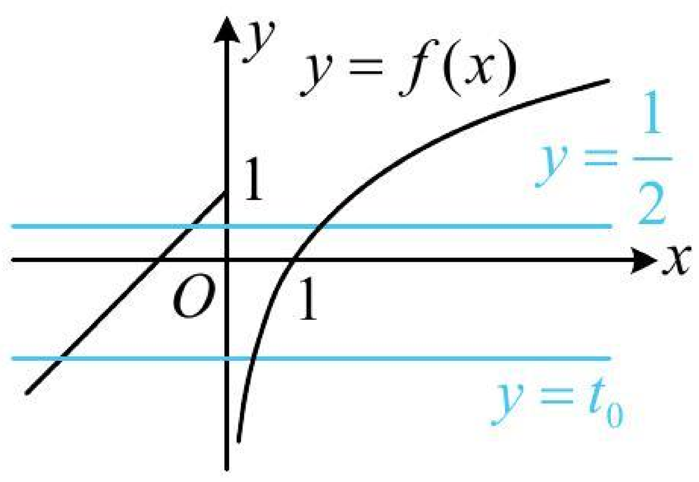


图4

6.（★★★★）若关于 x 的方程 $2e^{2x}=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}(a\in\mathbf{R})$ 有 4 个不同的实根，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(-\dfrac{1}{8},\dfrac{2-e}{e^2})$

解析：所给方程看上去不是复合结构，但只要两端同乘以 x^2 就可以化为复合结构，

$2\mathrm{e}^{2x}=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\Leftrightarrow 2x^2\mathrm{e}^{2x}=a-x\mathrm{e}^x(x\neq 0)\Leftrightarrow 2(x\mathrm{e}^x)^2+x\mathrm{e}^x-a=0(x\neq 0)$，

此时发现含 x 的部分都是 $x\mathrm{e}^x$ 这一整体结构，所以将 $x\mathrm{e}^x$ 换元，

设 $t=x\mathrm{e}^x$，则 $2t^2+t-a=0$，等会儿要把解得的 t 用来和函数 $y=x\mathrm{e}^x$ 的图象看交点，故先研究这个函数，

设 $f(x)=x\mathrm{e}^x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$，

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上↘，在 $(-1,+\infty)$ 上↗，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 $f(x)$ 的大致图象如图 1，由图可知一条水平直线与 $f(x)$ 的图象可能有 0，1，2 个交点，

故要使原方程有 4 个实根，方程 $2t^2+t-a=0$ 应有 2 根 t_1，t_2，

且 $t_1=f(x)$ 和 $t_2=f(x)$ 都有两根，所以 t_1，t_2 都在 $(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0)$ 上，

从而二次函数 $\varphi(t)=2t^2+t-a$ 的大致图象如图 2，故 $\begin{cases}\Delta=1+8a>0\\ \varphi(-\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a>0\\ \varphi(0)=-a>0\end{cases}$，解得：$-\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}$.

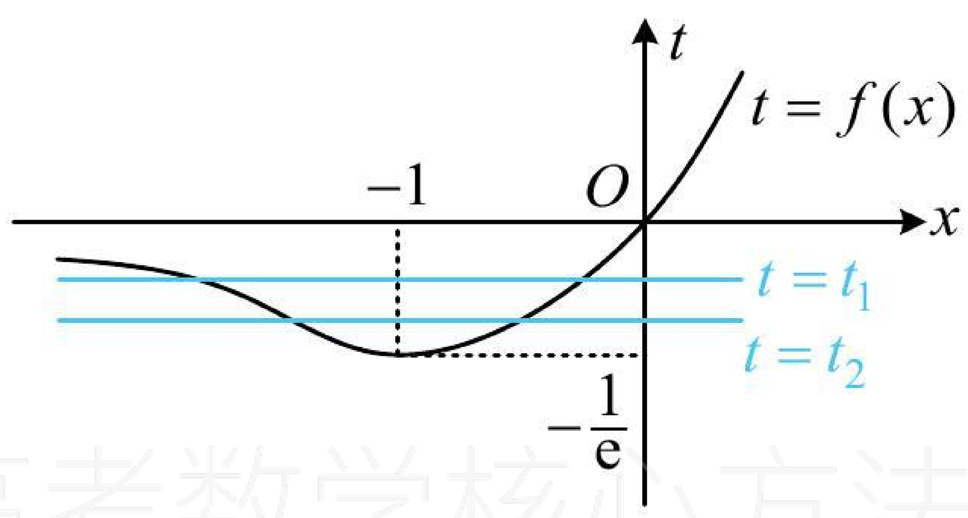


图1

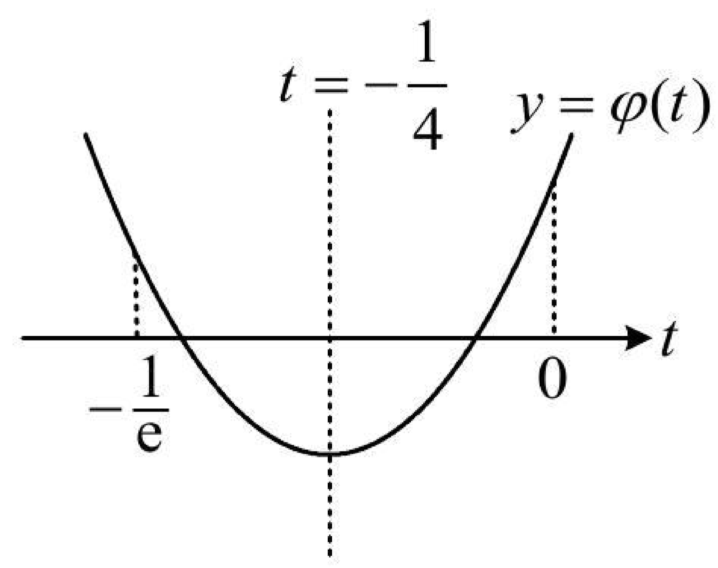


图2

【反思】本题难度颇高，其复合结构是隐藏的. 所以对于复杂的形式，我们要注意观察各部分的结构联系，找到变形的思路.